

Predizione di serie temporali basata su tecniche caotiche

Gregorio Procissi

RIUNIONE PROGETTO TANGO

Cefalù

7 Luglio 2003

Sommario



- Cenni su sistemi caotici
- Definizione del problema di predizione
- Errore di predizione
- Algoritmi di predizione caotica
- Prestazioni del predittore
 - Prove su serie temporali generate artificialmente
 - Prove su tracce reali



Background su sistemi caotici



- Chaos si riferisce al comportamento asintotico di un sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

non riconducibile a un punto di equilibrio, ne' ad una soluzione periodica ne' semi-periodica

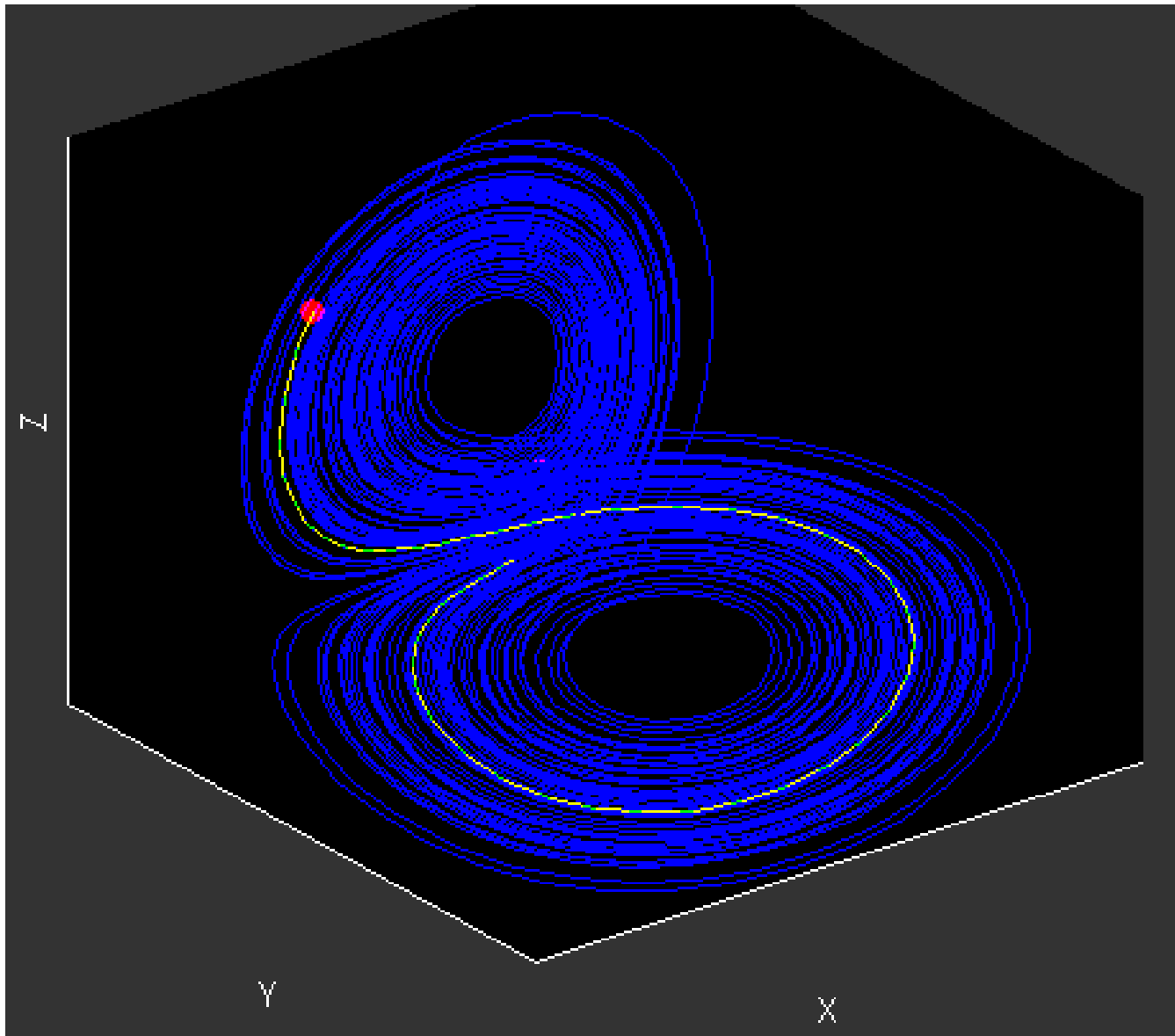
- *Sensitive dependence on initial condition (SIC)*: date due condizioni iniziali arbitrariamente “vicine” le traiettorie secondo cui evolve il sistema divergono finche' non divengono praticamente incorrelate
- Gli insiemi limite di sistemi caotici seguono geometrie frattali



Attractor

- Data un mappa $f:V \rightarrow V$, l'insieme α e' un attractor se:
 - $f(\alpha)=\alpha$, ovvero α e' invariante rispetto ad f
 - $\forall x \in B(\alpha) \supset \alpha, \exists z \in \alpha$ tale che
$$\|f^n(x)-z\| \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$
 - ($B(\alpha)$ e' detto bacino dell'attractor)
- Nei sistemi caotici, tipicamente si parla di *strange attractor*
- Attractor possono essere classificati mediante gli *esponenti di Lyapunov*
- La dimensione degli attractor puo' essere calcolata secondo diverse definizioni (*Capacity, Information, Correlation, Lyapunov,...*)

Es. Attrattore di Lorenz



Il problema inverso



- Sia $f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ una mappa con strange attractor α e sia $\{x_n\}$ una sequenza di iterazioni di f .
- Il problema inverso consiste nel costruire una mappa $f_\infty: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ sulla base delle iterazioni osservate, tale che $x_{n+1} = f_\infty(x_n)$ **per $n \geq 1$** (soluzione unica!)
- Problema inverso maggiormente realistico: trovare una mappa $f_N: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ sulla base di un **numero finito** N di iterazioni, tale che
$$x_{n+1} = f_N(x_n) \quad \text{per } 1 \leq n \leq N-1$$
- La mappa (non unica!) $f_N: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ e' detta **predittore**



Errore di predizione

- Dato un generico predittore f_N , **l'errore di predizione $\sigma(f_N)$** e' definito come

$$\sigma^2(f_N) = \frac{1}{V} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{n=M}^{N+M-1} \|x_{n+1} - f_N(x_n)\|^2$$

dove V e' un *fattore di normalizzazione* definito come

$$V = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\| x_m - \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_m \right) \right\|^2$$

0 $\sigma(f_N)$ 1

good **bad**

Predittore caotico



- Il punto di partenza e' assumere una funzione scalare $x(t)$ che rappresenti l'uscita di un sistema la cui dinamica sia quella di uno strange attractor di dimensione I da cui venga estratta una sequenza di campioni $x(nT_s)$
- “Immergere (embed)” lo spazio degli stati in uno spazio **m**-dimensionale
- **Takens embedding theorem.** La dimensione dello spazio degli stati **m** soddisfa la relazione: **$I \leq m \leq 2I+1$**
- Valori di prova per m vengono detti *embedding dimension*, mentre il valore minimo m^* per cui il teorema e' verificato e' detto *minimal embedding dimension*
- **m^*** non e' un invariante del sistema dinamico sottostante, e' un valore specifico del teorema di Takens.



Predittore caotico (2)



- Il problema inverso consiste nel trovare una mappa f_N che soddisfi alla relazione precedente data la serie temporale **finita** $\mathbf{x}(n)$, $1 \leq n \leq N$.
- Problemi inter-connessi:
 - Il valore m^* **non e' noto** a priori
 - Scelta della **tecnica di interpolazione** (ovvero scelta della funzione f_N)
 - Valutazione dell'**errore di predizione** dello stimatore



Procedura

- Scelta della funzione di interpolazione f_N
- Selezione di una valore m di prova
- Costruzione dello spazio degli stati
- Calcolo dell'errore di predizione su una sequenza di lunghezza $N+M$

$$\sigma^2(f_N) = \frac{1}{V} \frac{1}{M} \sum_{n=M}^{N+M-1} \left\| \underline{x}_{n+1} - f_N(\underline{x}_n) \right\|^2$$

(V e' la varianza della sequenza)

- La procedura viene ripetuta incrementando m finche' l'errore non e' ragionevolmente basso.

Costruzione dello spazio degli stati



- Su consideri un generico istante t . Il **vettore di stato** associato è:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \\ \vdots \\ x(t - (m-1)\tau) \end{pmatrix}$$

- Il parametro τ è detto **delay time**
- Si assume una relazione funzionale $\underline{x}(t + T) = f_T(\underline{x}(t))$
- Si cerca di determinare un predittore \mathbf{F}_T che approssimi la funzione \mathbf{f}_T

$$\hat{\underline{x}}(t + T) = F_T(\underline{x}(t)) \approx \underline{x}(t + T)$$

- Nota: $T < \tau$, per cui lo stato futuro ha solo la prima componente incognita!

Tecniche di interpolazione



- **Tecniche globali.** La funzione di interpolazione (quale che sia) sfrutta **tutti** i vettori ottenibili dalla sequenza di N valori. Computazionalmente troppo onerosa!
- **Tecniche Locali.** La funzione di interpolazione sfrutta solo gli stati piu' vicini (secondo una certa definizione di distanza nello spazio degli stati).
 - Si considerano tutti gli istanti t'_i e si selezionano i k stati piu' vicini;
 - Geometricamente, si tratta di ricercare porzioni della sequenza $x(n)$ nel passato che “assomigliano” al presente;
 - La predizione si basa su cosa e' accaduto in passato in situazioni analoghe
 - Problema: come scegliere k ? Tipicamente **$k=m+1$**



Funzioni di interpolazione lineari



- Dopo aver selezionato i k stati vicini, si calcola la pendenza della retta che unisce ciascuna coppia vicino-successivo $(x(t'_j), x(t'_j+T))$

$$a_i = \frac{x(t'_i+T) - x(t'_i)}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} (x(t'_i+T - j\tau) - x(t'_i - j\tau))^2}}$$

- Si calcolano le k possibili evoluzioni dello stato

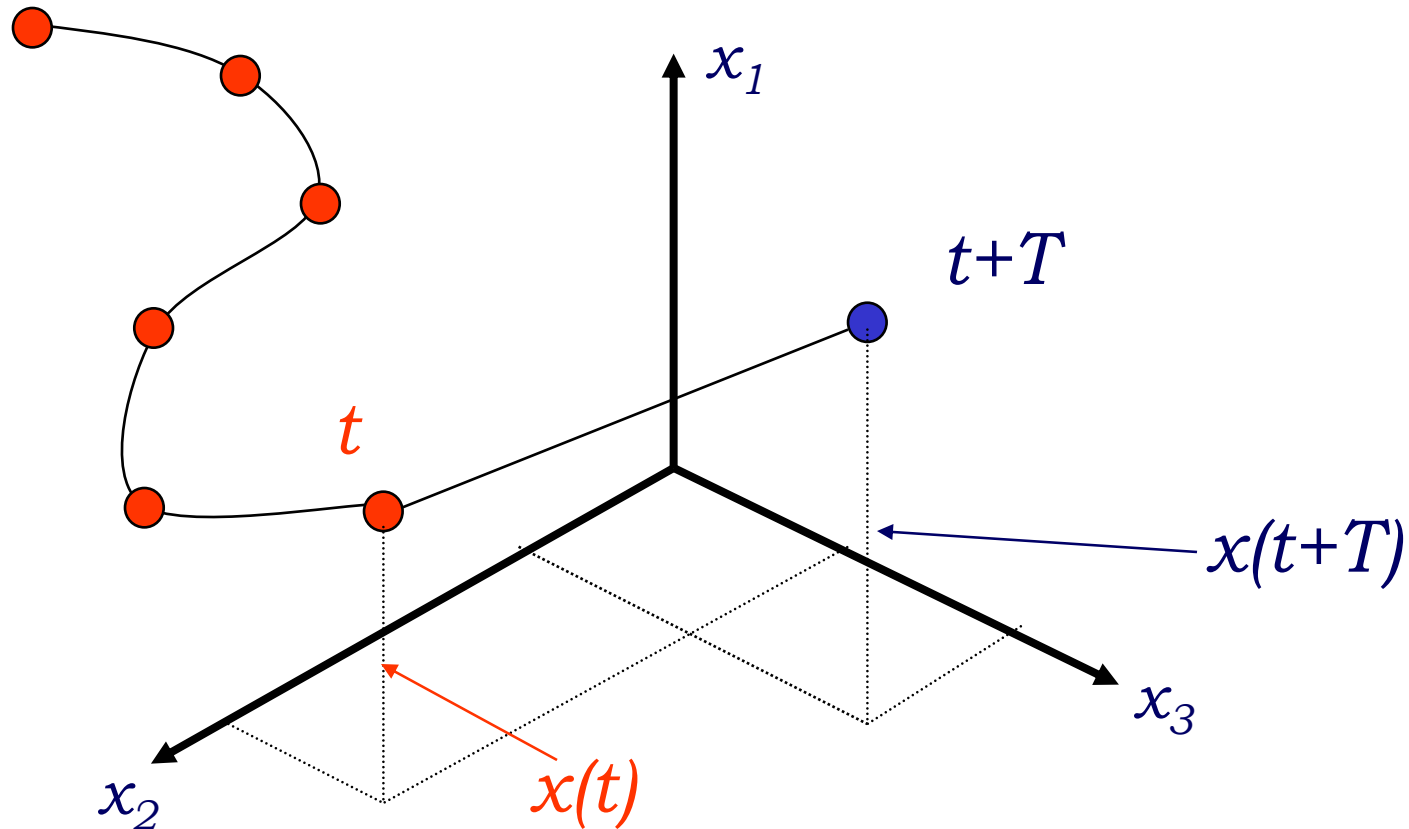
$$\hat{x}_i(t+T) = x(t) + a_i \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{m-1} (x(t+T - j\tau) - x(t - j\tau))^2} \right)$$

- La predizione si ottiene mediando le k possibili predizioni

$$\hat{x}(t+T) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \hat{x}_j(t+T)$$



Traiettoria dello stato e predizione lineare

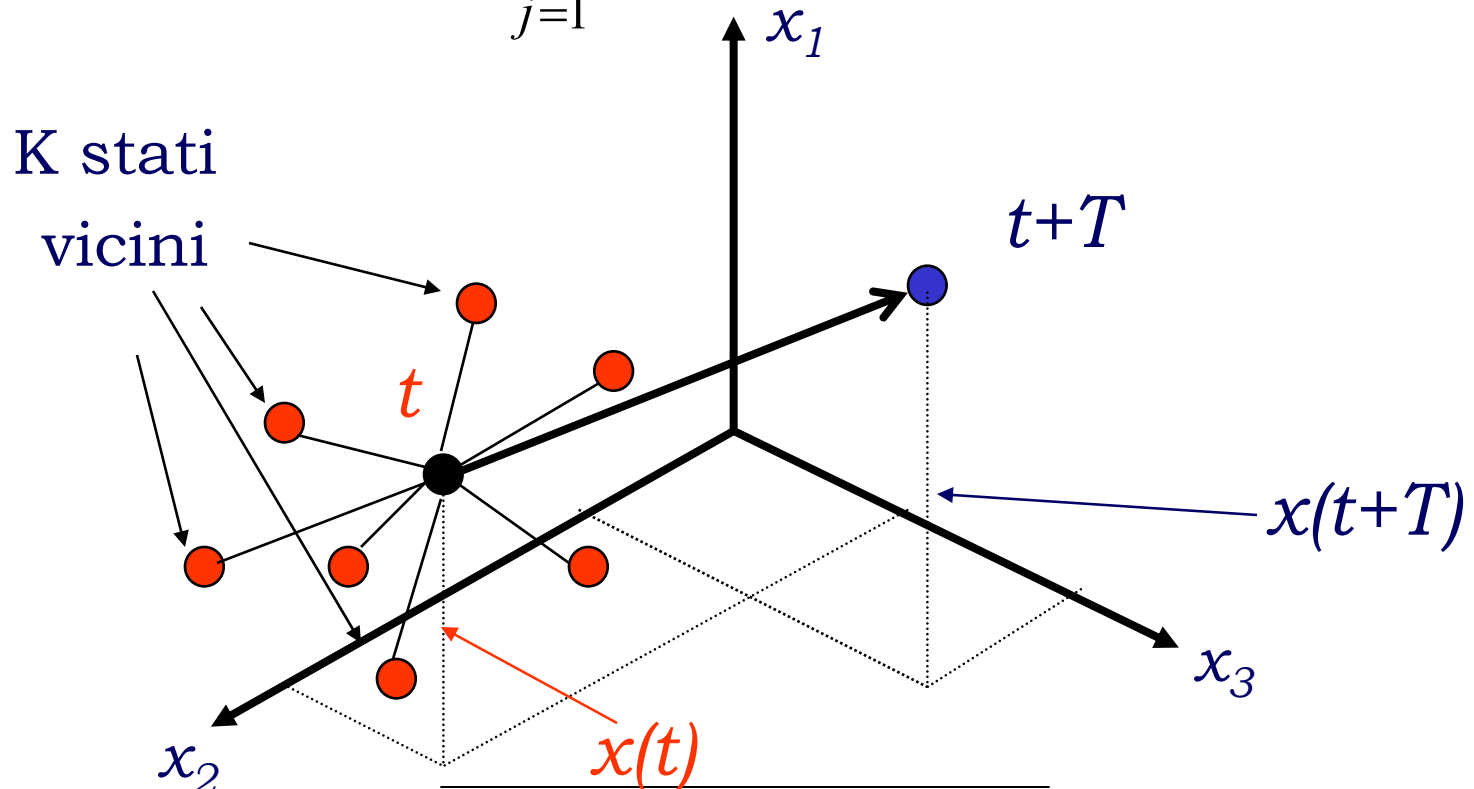


Radial basis functions (1)



- La predizione viene effettuata secondo una funzione:

$$\hat{x}(t+T) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \phi(\|x(t) - x(t_j')\|) + \alpha$$



Radial basis functions (1)



- Le funzioni $\phi: R^+ \rightarrow R$ sono dette *radial basis function*.

$$\phi(r) = (r^2 + c^2)^{-\beta}, \quad \beta > -1 \text{ e } \beta \neq -1$$

- I coefficienti λ_i si ricavano imponendo la stessa condizione per i valori noti del passato

$$\hat{x}(t'_i + T) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \underbrace{\phi(\|\underline{x}(t'_i + T) - \underline{x}(t'_j)\|)}_{\phi_{ij}} + \alpha$$

- Si ottiene un sistema lineare in $(k+1)$ equazioni e $k+1$ incognite che si può risolvere con qualsiasi tecnica numerica (es. metodo QR)

$$\begin{pmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1k} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{k1} & \cdots & \phi_{kk} & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t'_1 + T) \\ \vdots \\ x(t'_k + T) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Parametri di liberta' dei predittori



- I Predittori dipendono dai seguenti parametri di progetto:
 - Numero di dati su cui effettuare la predizione (N)
 - Delay time (τ)
 - Minimal Embedding dimension (m^*)
 - Numero di vicini (k)
- I predittori basati su radial basis functions dipendono inoltre dai parametri
 - β (tipicamente assunto $-1/2$)
 - c
- Tali parametri vengono scelti in modo da minimizzare l'errore di predizione

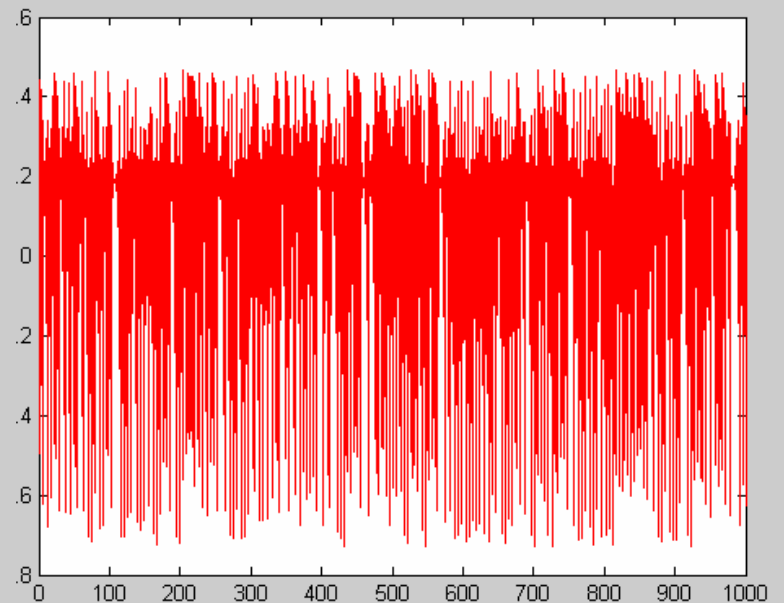
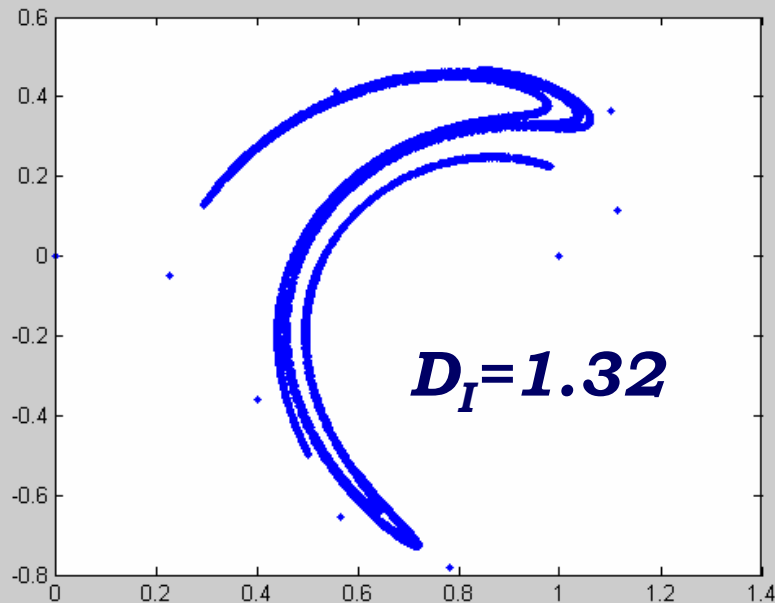


Ikeda Map

$$\begin{cases} \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mu(x_1 \cos t - x_2 \sin t) \\ \mu(x_1 \sin t + x_2 \cos t) \end{pmatrix}, & t = 0.4 - \frac{6.0}{1 + x_1^2 + x_2^2}, \mu = 0.7 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Strange attractor

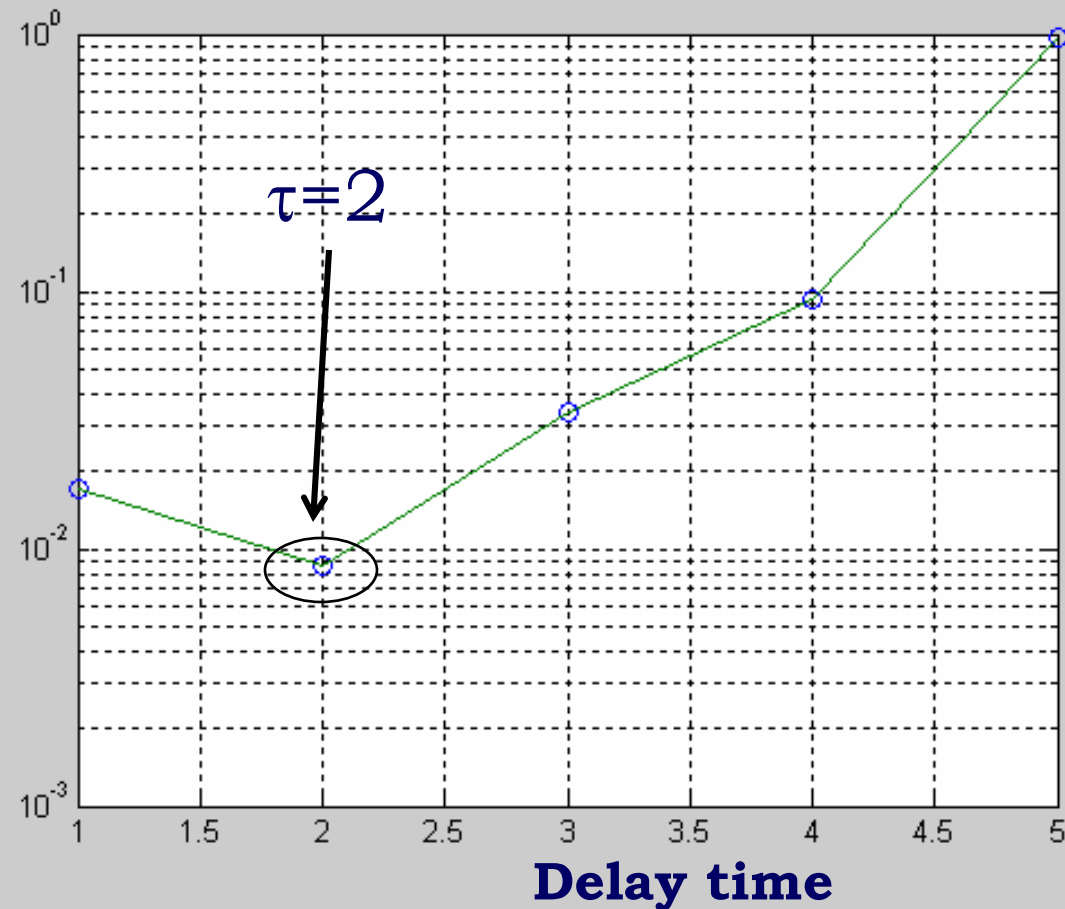
Uscita della Ikeda Map



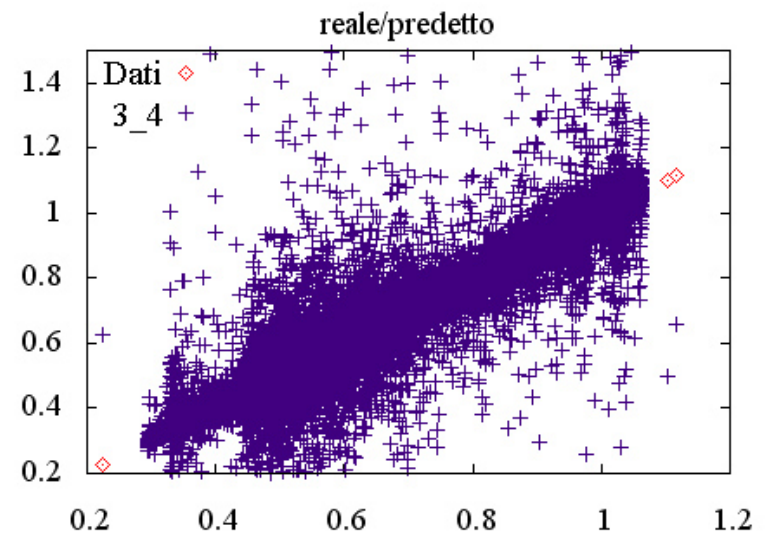
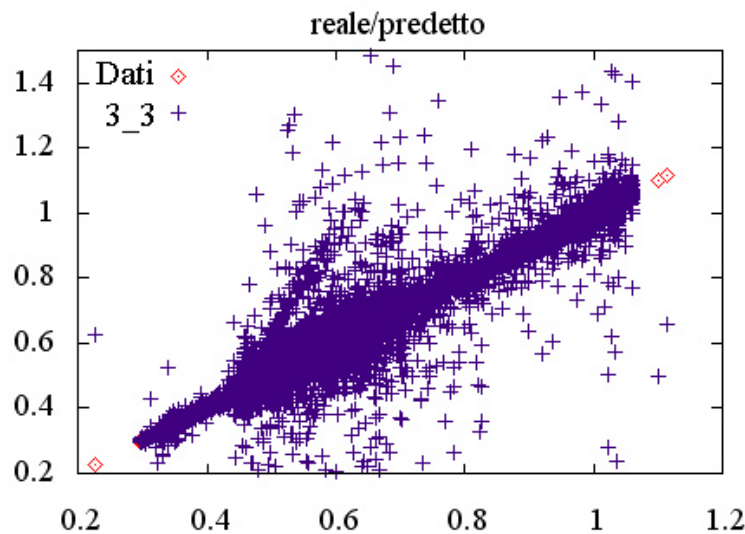
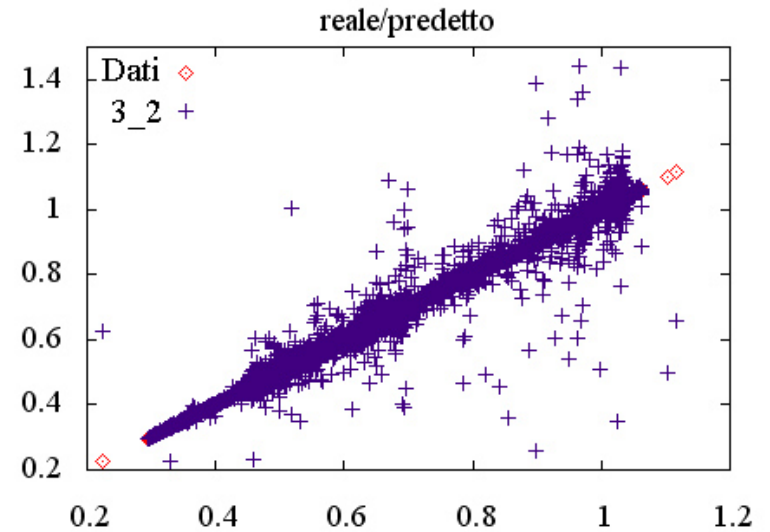
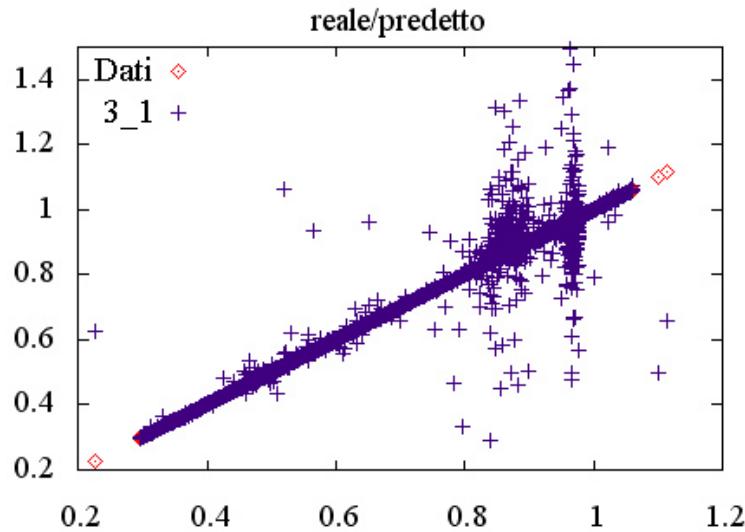
Radial Basis Predictor

- Embedding dimension $m^*=3$
- Ricerca del Delay-time

Errore di predizione



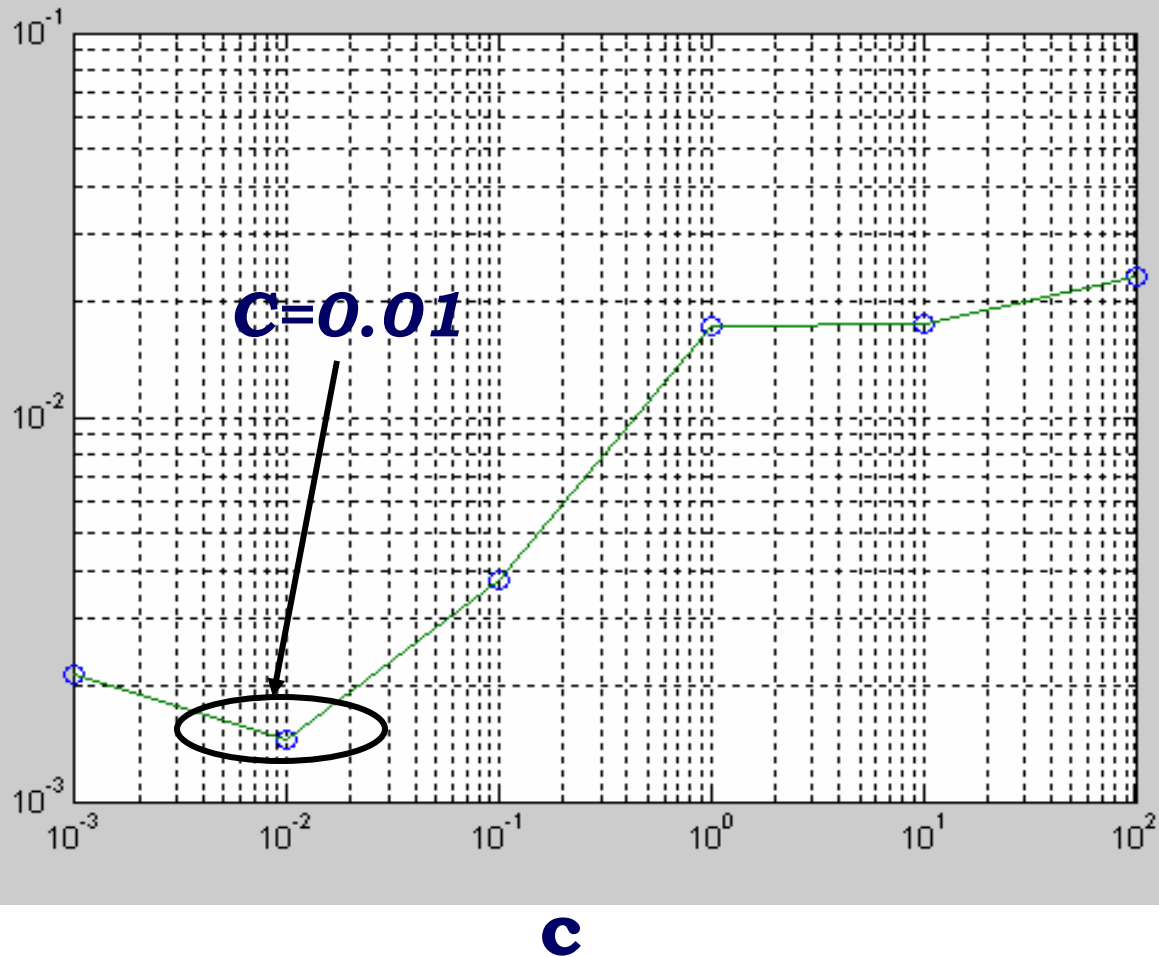
Impatto del parametro *delay time*



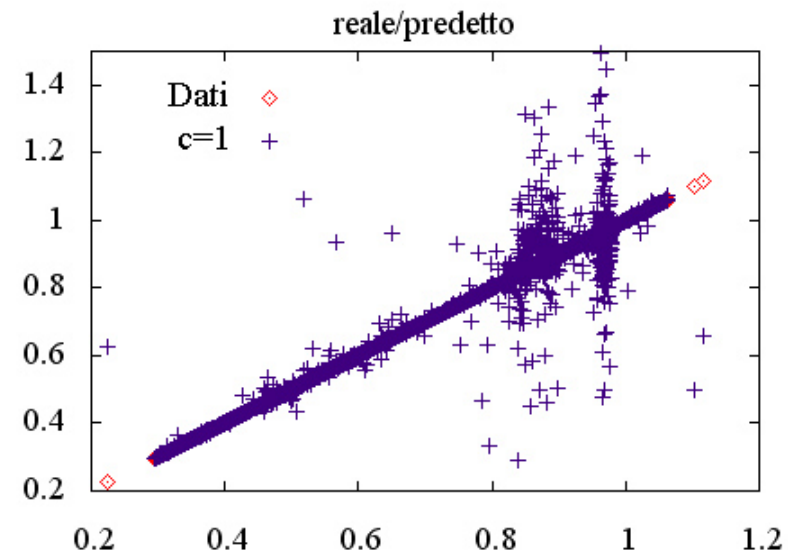
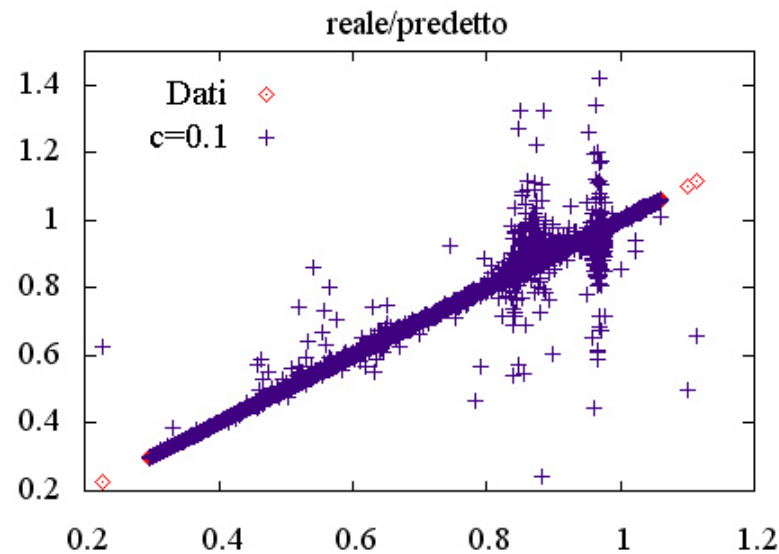
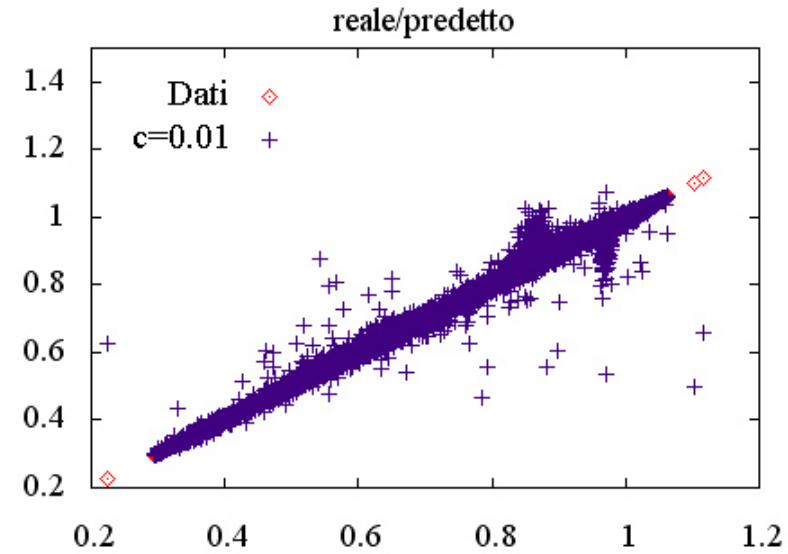
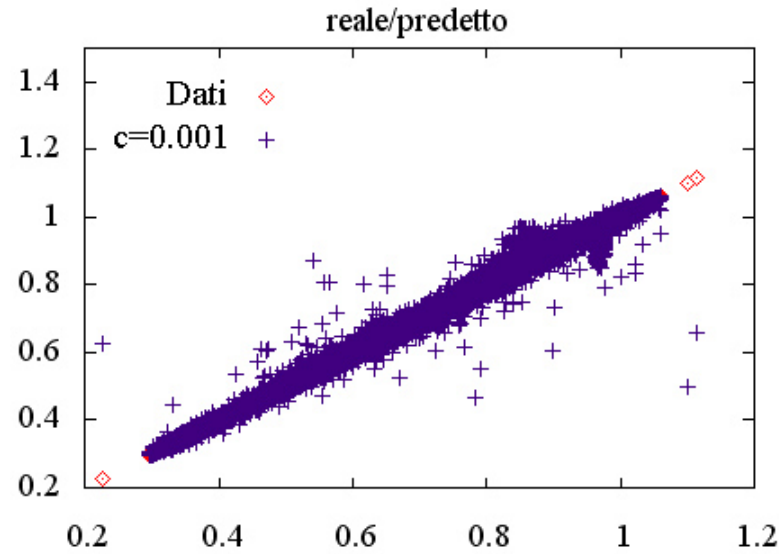
Parametro c



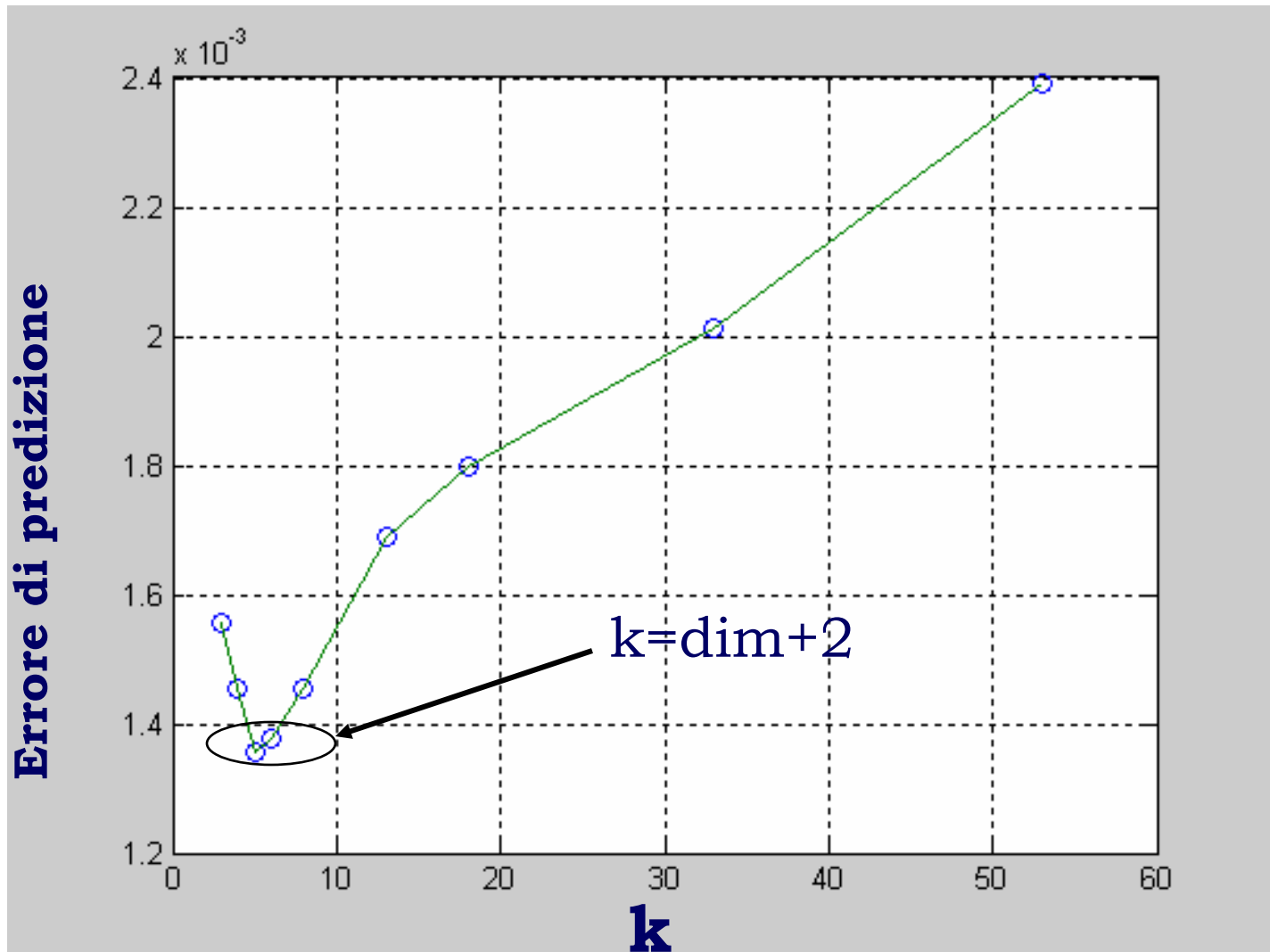
Errore di predizione



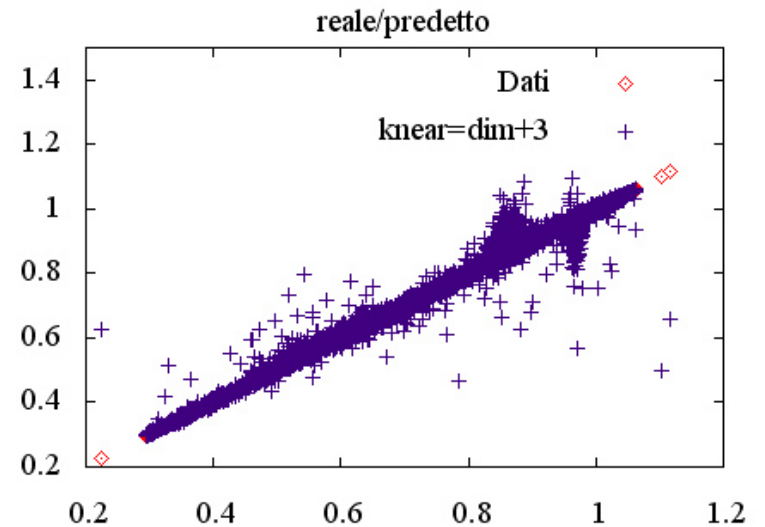
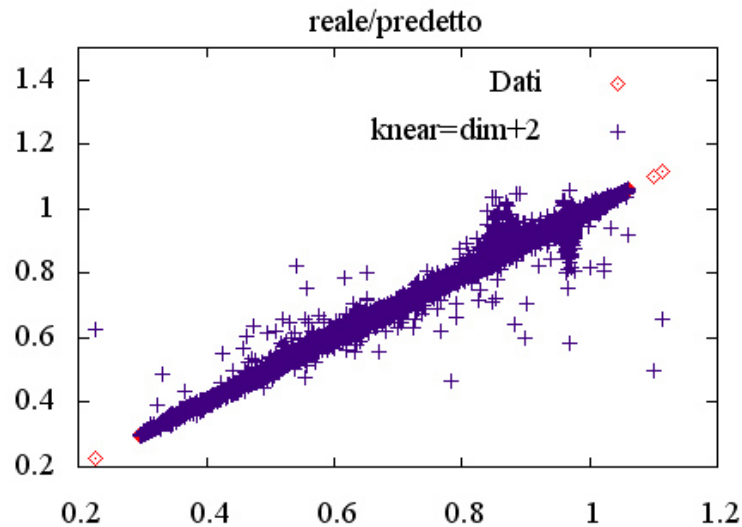
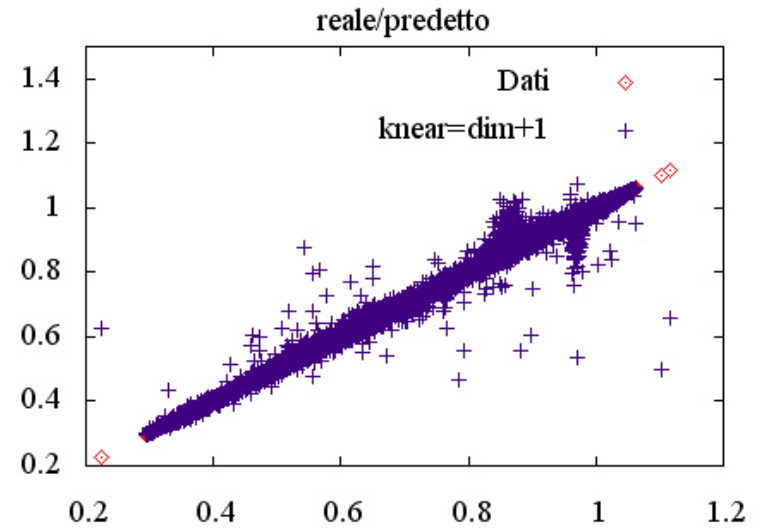
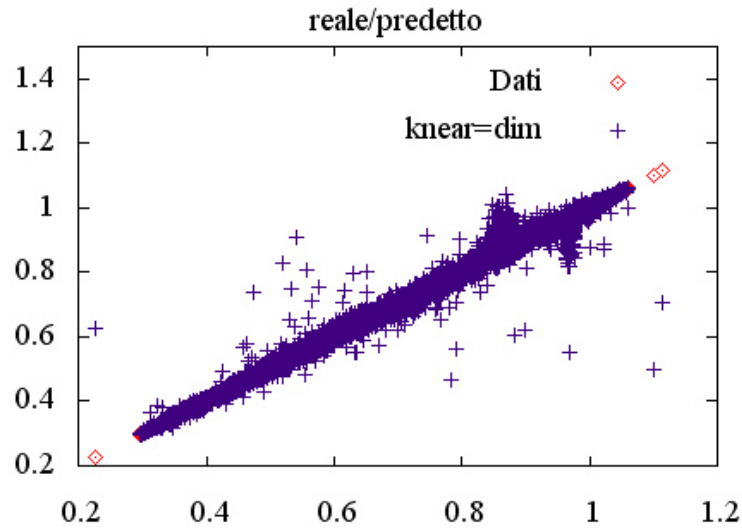
Impatto del parametro c



Numero di “vicini”



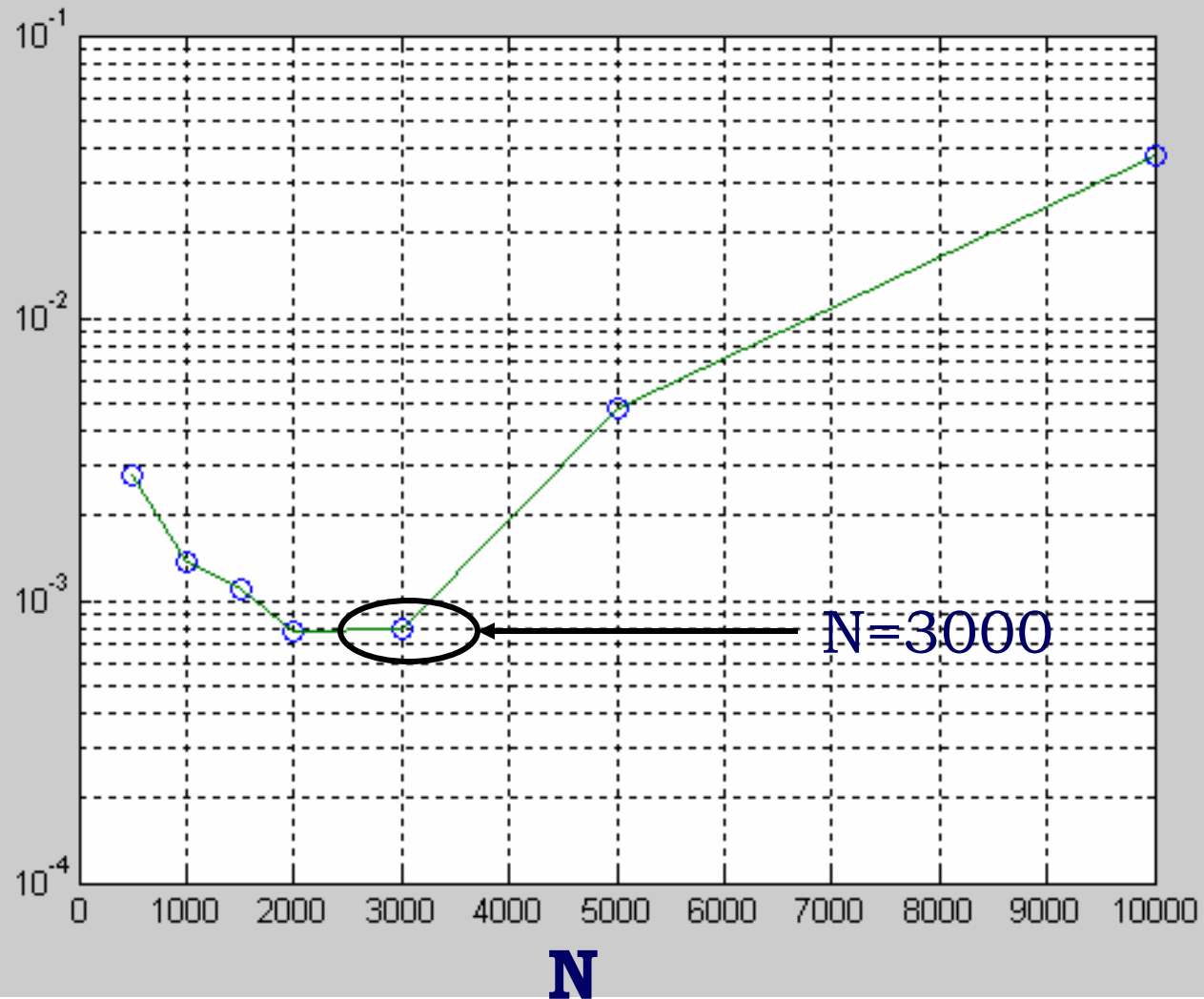
Impatto del parametro k



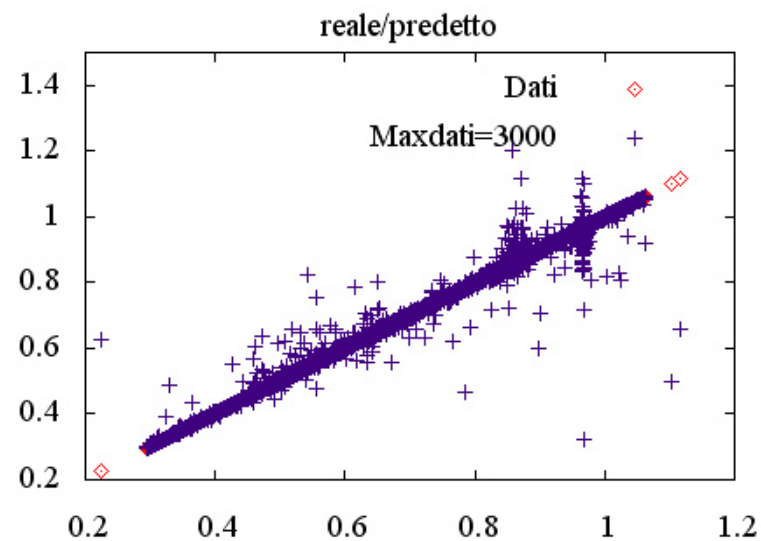
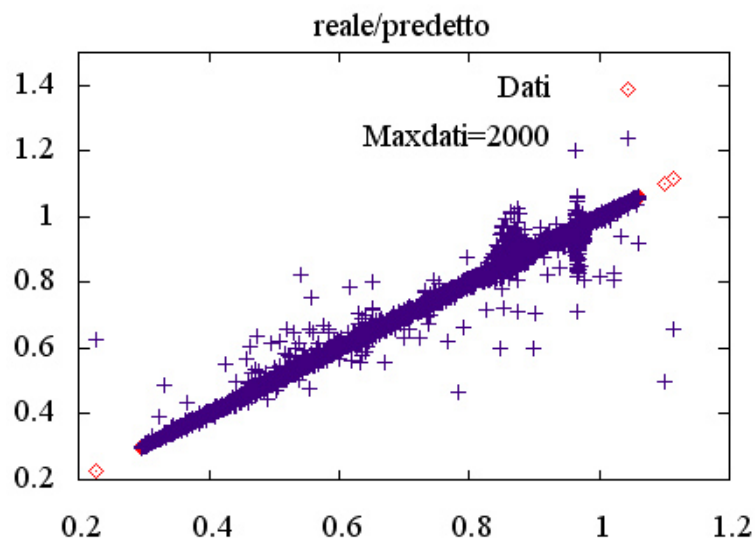
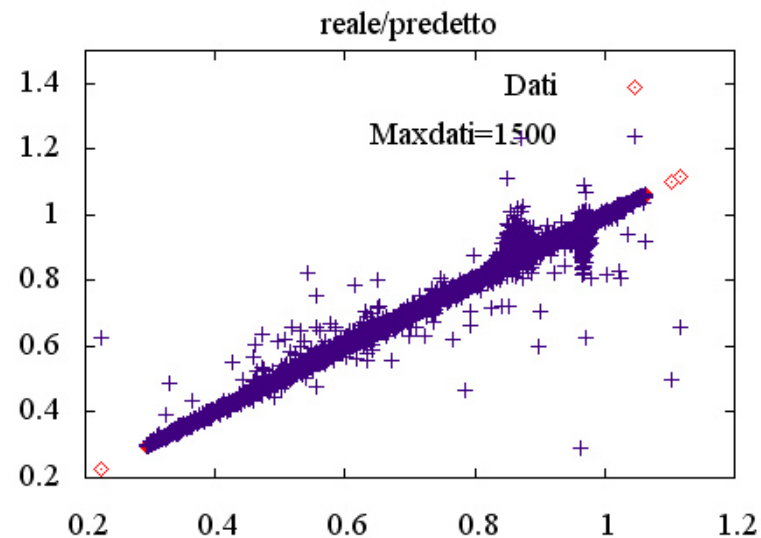
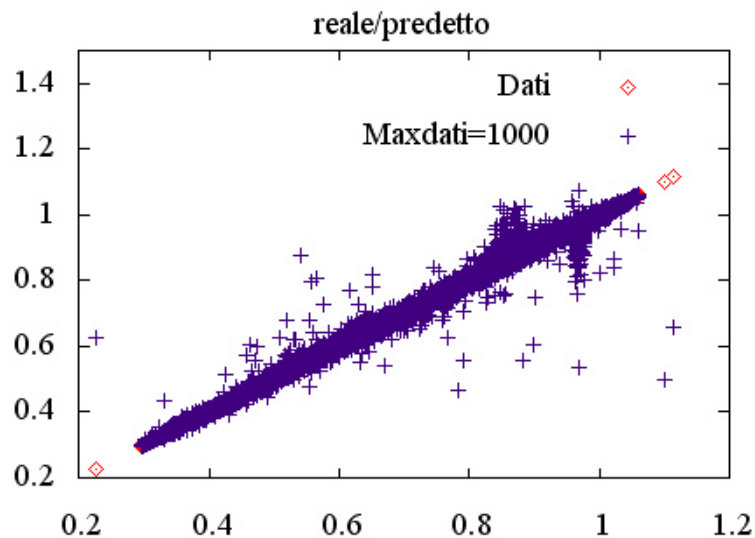
Numero di campioni - N



Errore di predizione



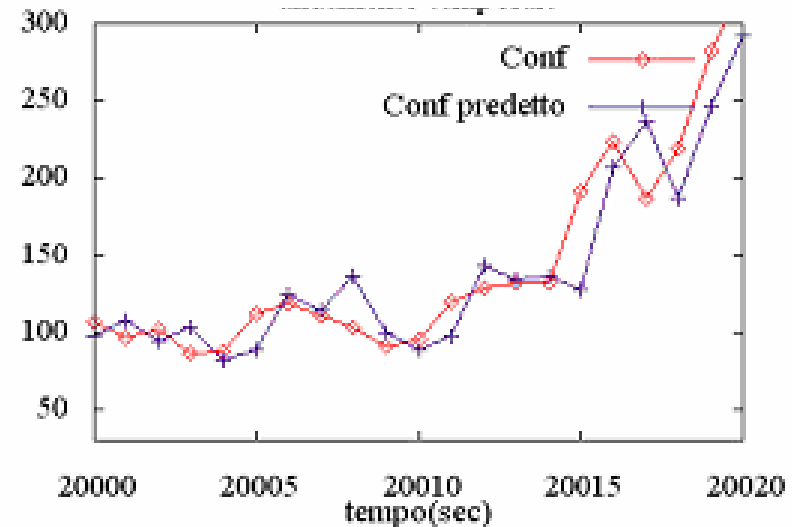
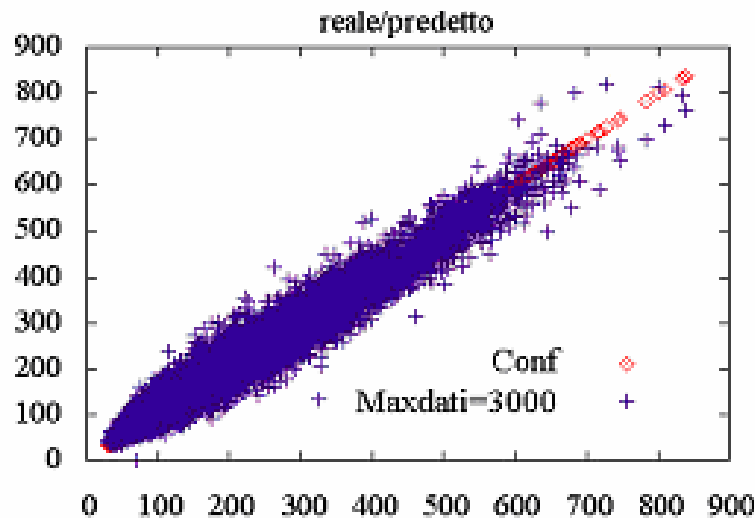
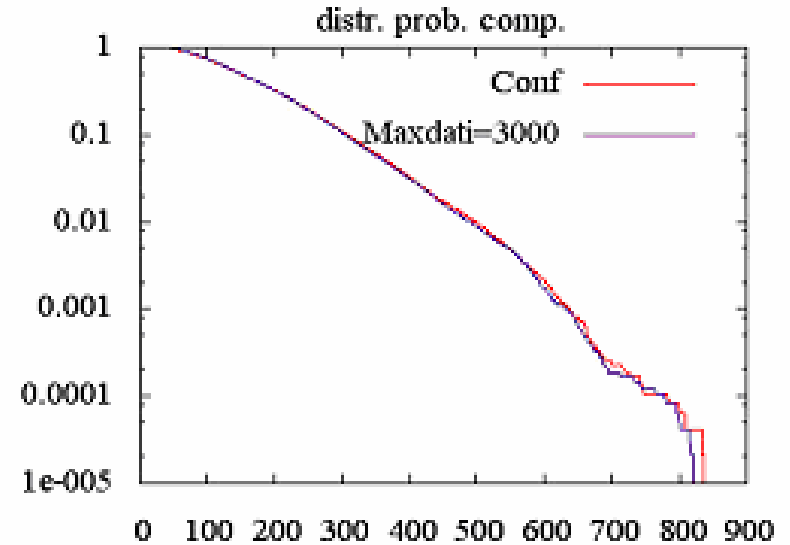
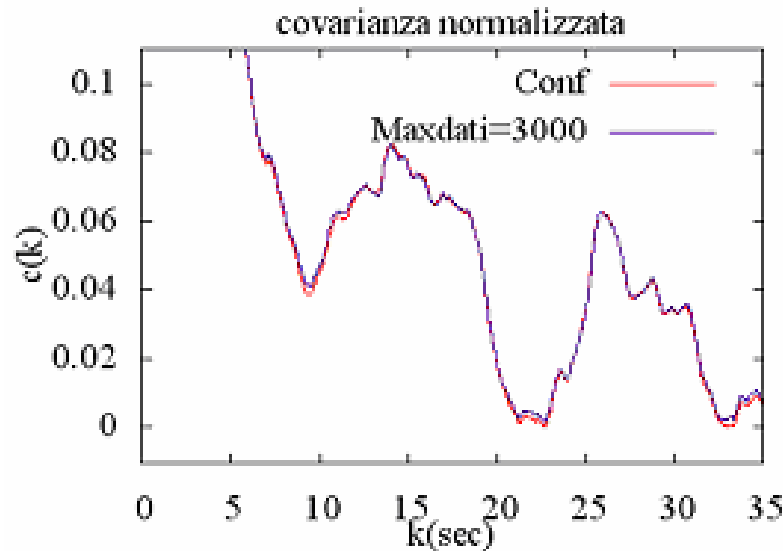
Impatto del numero di campioni N



Traccia di videoconferenza

- **Average bit rate 1.668 Mbps**
 - **Peak-to-mean ratio: 4.8**
 - **Frame per second: 25**
 - **Number of frames: 48496**
-
- Predittore basato su radial basis function
 - Embedding dimension $m^*=3$
 - Delay-time = 40 msec
 - Numero di vicini $k = m^*+1 = 4$
 - Parametro $c=0.28$
 - Numero massimo di dati $N=3000$

Prestazioni del predittore



Conclusioni e progetti futuri



- Lavoro svolto
 - Analizzato due predittori di sequenze caotiche
 - Introdotto un parametro di qualità della predizione per automatizzare la scelta dei parametri del predittore
 - Applicato i risultati a sequenze caotiche e a traffico reale (risultati preliminari)
- Progetti futuri
 - Investigare con maggior dettaglio le prestazioni del predittore per sequenze di traffico reale
 - Applicazione nell'ambito di problematiche di allocazione dinamica di risorse

